Colles de Maths - semaine 10 - MP*2
Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Intégrales à paramètres

Exercice 1 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+^*)$. On pose, pour $\alpha > 0$,

$$I(\alpha) = \left(\int_0^1 f(t)^\alpha \, \mathrm{d}t\right)^{1/\alpha}.$$

Déterminer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers 0 et $+\infty$.

Exercice 2 Soit $a, b > 1$. Calculer

$$\int_0^\pi \ln\left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x}\right) \mathrm{d}x.$$

Exercice 3 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) \neq 0$. Pour $t \geqslant 0$, on définit

$$g(t) = \int_0^1 \frac{f(x)}{1 + tx} \, \mathrm{d}x.$$

Donner un équivalent en $+\infty$ de g.

Théorèmes d'interversion

Exercice 4 Donner un développement asymptotique à deux termes quand n tend vers l'infini de

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + t + t^n} \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 5 Soit $T > 0$ et $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ continue.

1. Déterminer la limite simple de la suite $g_n : t \in [0, T] \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^T f(u) \, e^{-kn(t-u)} \, \mathrm{d}u$.
2. On suppose que $\displaystyle\left(\int_0^T f(t) \, e^{nt} \, \mathrm{d}t\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que $f = 0$.

Intégrales généralisées

Exercice 6 Etudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) \, \mathrm{d}t$
2. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos t}{\sqrt{t} + \cos t} \, \mathrm{d}t$

Exercice 7 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b pour que l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^a)}{x^b} \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 8 Pour quels réels α la fonction

$$f : x \mapsto x^\alpha \int_0^x \sqrt{\frac{t}{1+t^2}} \, \mathrm{d}t$$

est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f et f'^2 sont intégrables.
Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.